Ruch drgający

Ruch harmoniczny prosty, tłumiony i wymuszony

Ruchem drgającym **nazywamy ruch ciała zachodzący wokół stałego położenia równowagi.**

Ruchy drgające dzielimy na ruchy:

- okresowe,
- nieokresowe.

Ruch okresowy (periodyczny, harmoniczny) jest to taki ruch, w którym położenie lub stan ciała powtarza się w jednakowych odstępach czasu, zwanych okresem T.

$$\mathbf{x(t)=x(t+T)}$$

x(t) oznacza położenie ciała na osi x w chwili t

Jeżeli drganie opisane jest funkcją trygonometryczną sinus lub cosinus

$$\mathbf{x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

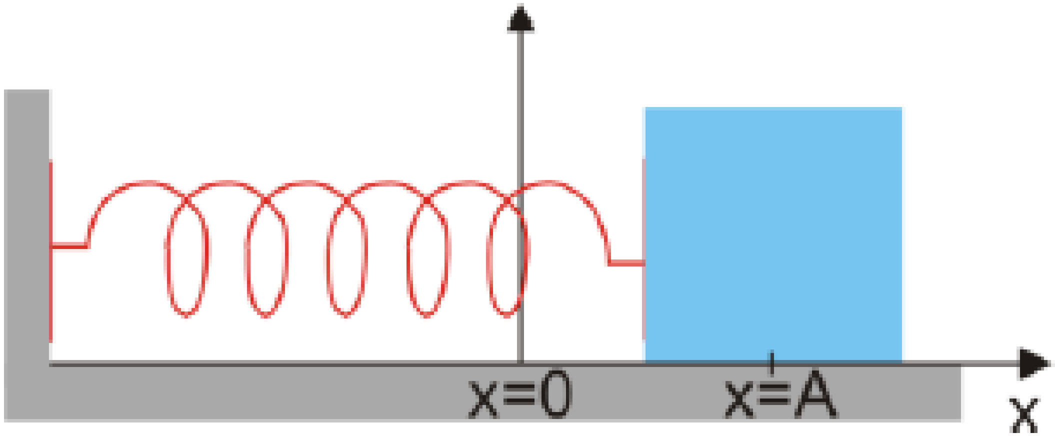
to ruch taki nazywamy drganiem harmonicznym (oscylatorem harmonicznym) prostym

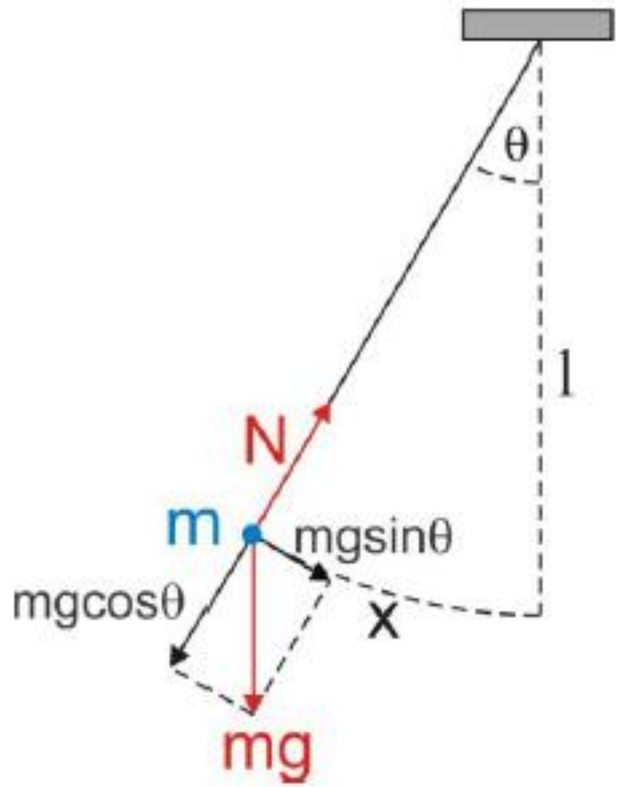
A - amplituda drgań (maksymalne wychylenie) ,

ω - częstotliwość kołowa (pulsacja),

$\boldsymbol{\omega t + \varphi}$ - faza drgań,

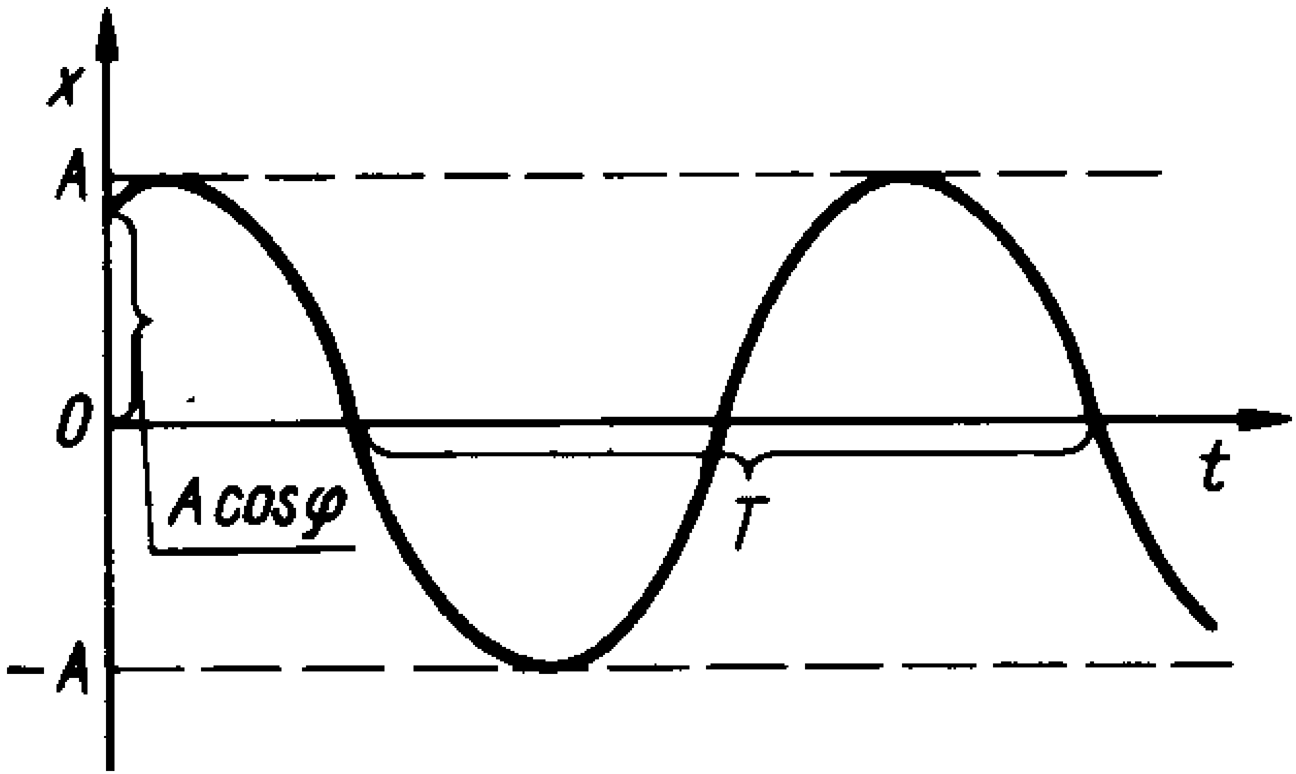
$\boldsymbol{\varphi}$ - faza początkowa


x=0
x=A
x


θ
l
N
m
mgsinθ
mgcosθ
x
mg

Wykres drgań harmonicznych prostych

$$\mathbf{x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)}$$



$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$x(t)=x(t+T)$$

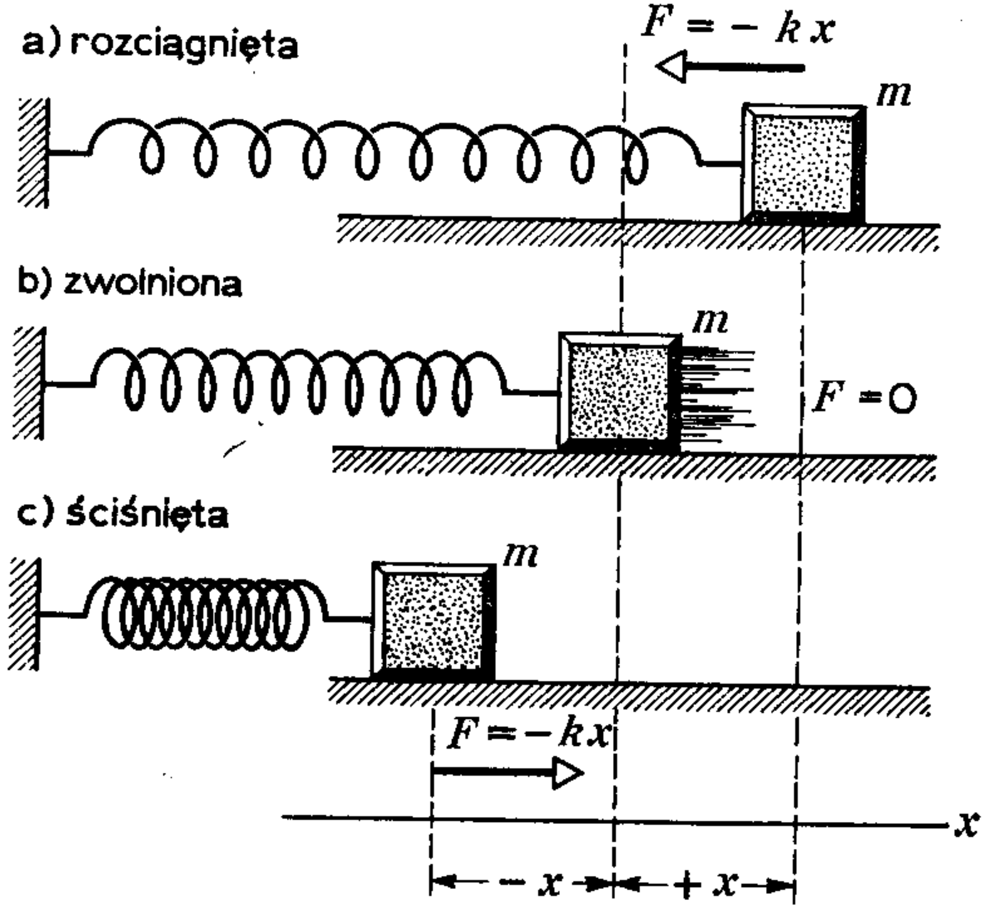
$$A\cos(\omega t + \varphi) = A\cos(\omega t + \omega T + \varphi)$$

$\omega T=2\pi$ $\qquad$ $$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$1/T = f$

$[\omega]$ = rad/s [f] = 1 Hz=1 s^{-1}

Oscylator harmoniczny prosty



$$F = m \cdot a = m \frac{d^2x}{dt^2} = -k \cdot x$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$\text{gdzie}\ \varphi_1 = \varphi + \frac{\pi}{2}$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = \frac{dx(t)}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$$

- **Przyspieszenie w ruchu harmonicznym jest proporcjonalne do wychylenia, ale jest przeciwnie skierowane.**

- *Energia kinetyczna*

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi)$$

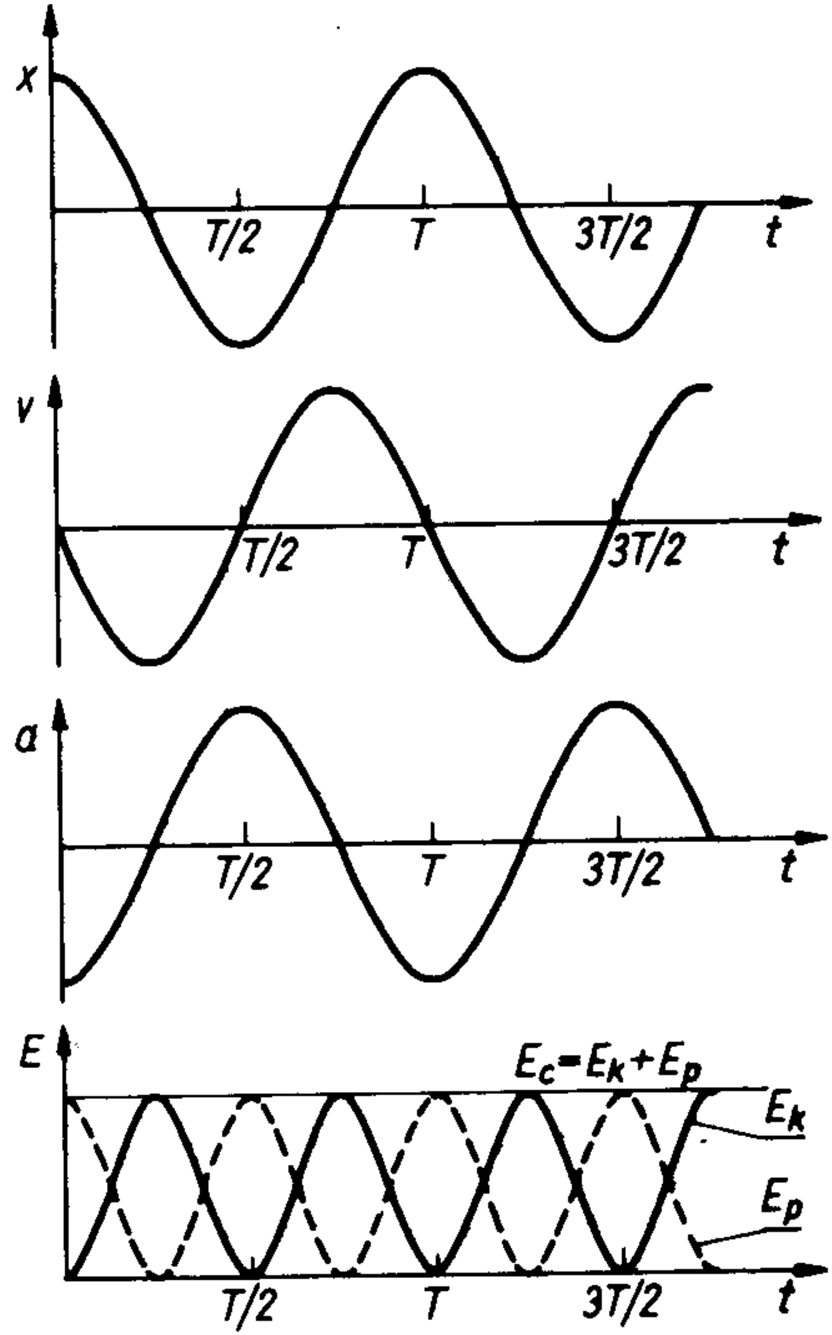
- *Energia potencjalna*

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi)$$

- *Energia całkowita*

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi) +$$

$$\frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}kA^2$$



Zależności:

x(t),

v(t),

a(t)

E(t)

dla oscylatora harmonicznego prostego z zerową fazą początkową (φ=0)

Drgania tłumione

Siła tłumiąca dla małych prędkości ciała drgającego wyraża się wzorem

$$\mathbf{F_t = -b \cdot v = -b \frac{dx}{dt}}$$

b – stała tłumienia

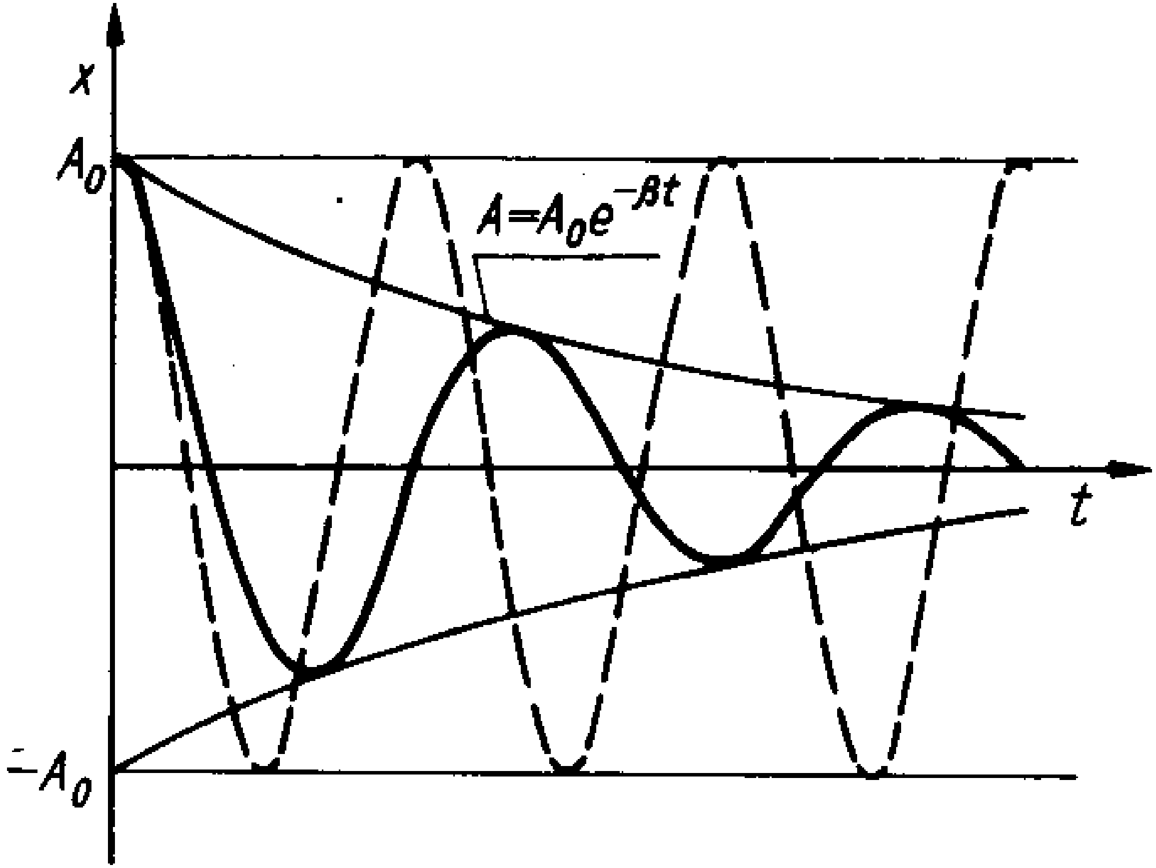
równanie różniczkowe drgań tłumionych

$$\mathbf{m\frac{d^2x}{dt^2} = -b\frac{dx}{dt} - kx}$$

$$\mathbf{x(t) = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega_1 t + \varphi)}$$

$$\beta = \frac{b}{2m}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}$$



$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \beta^2} < \omega$$

Częstotliwość drgań tłumionych jest mniejsza niż częstotliwość swobodna

Drgania wymuszone, rezonans

okresowa siła wymuszająca

$$\mathbf{F_w = F_0 \cos \Omega t}$$

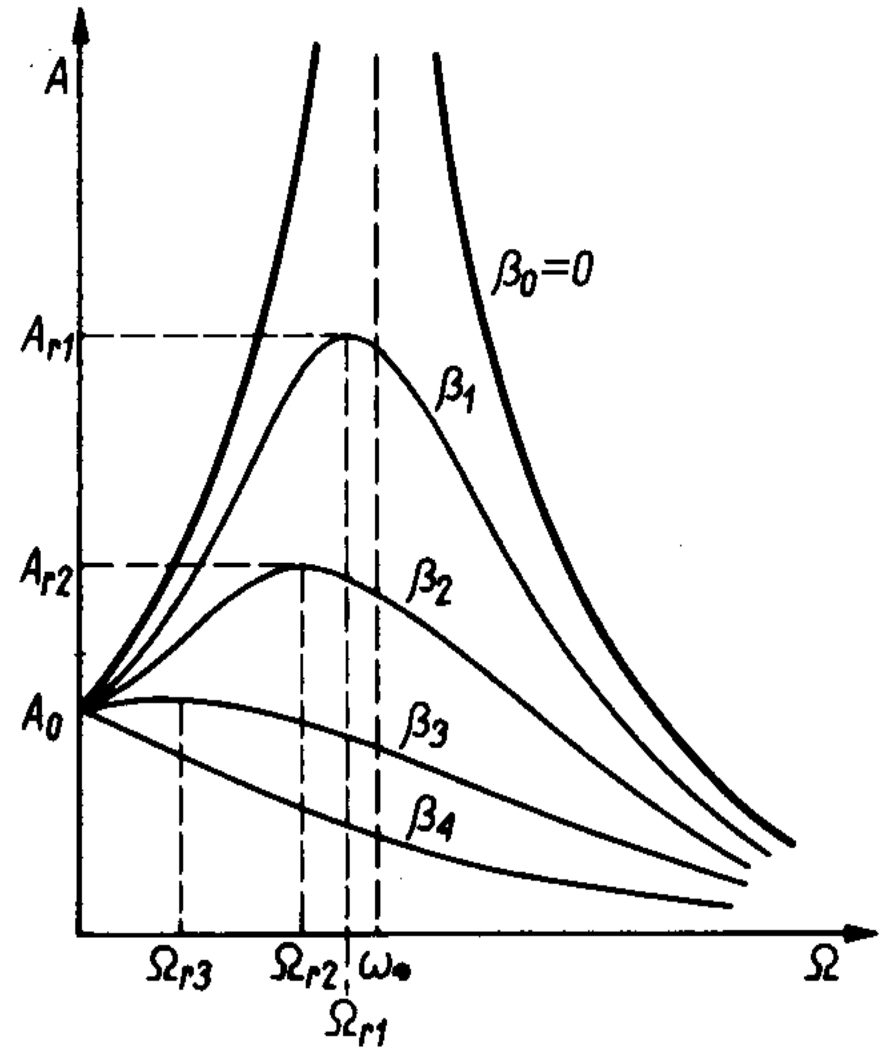
$$\mathbf{m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \Omega t}$$

$$\mathbf{x(t) = A \cos(\Omega t + \Phi)}$$

$$\mathbf{A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}}$$

$$\mathbf{\Phi = ar\,ctg\left(-\frac{2\beta\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}\right)}$$

- W wyniku działania siły wymuszającej ciało wykonuje drgania harmoniczne z pulsacją Ω.
- Amplituda drgań wymuszonych jest również zależna od Ω (i od F_0).
- Funkcje $A=f(\Omega)$ dla różnych wartości parametru tłumienia β noszą nazwę *krzywych rezonansowych*



- Maksymalna wartość amplitudy A_r jest tym większa im mniejszy jest współczynnik tłumienia β.

- Przy bardzo silnym tłumieniu rezonans nie występuje.

- Silny wzrost amplitudy drgań układu tłumionego gdy na układ działa siła wymuszająca o pulsacji bliskiej pulsacji drgań swobodnych nazywa się **rezonansem.**

Składanie drgań harmonicznych

- Drgania nazywamy równoległymi gdy zachodzą wzdłuż tej samej prostej.
- Drgania są prostopadłe gdy zachodzą wzdłuż prostych prostopadłych.

Składanie drgań równoległych

- ***Jednakowe pulsacje i stała różnica faz.***

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}$$

- **Superpozycja drgań równoległych, o tych samych pulsacjach różniących się fazą, daje w wyniku drganie o tej samej pulsacji.**

dudnienia

- *Niewielka różnica faz*

$$\mathbf{x_1 = A\cos\omega_1 t = A\cos(\omega + \Delta\omega)t}$$

$$\mathbf{x_2 = A\cos\omega_2 t = A\cos(\omega - \Delta\omega)t}$$

$$\boldsymbol{\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \Delta\omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}}$$

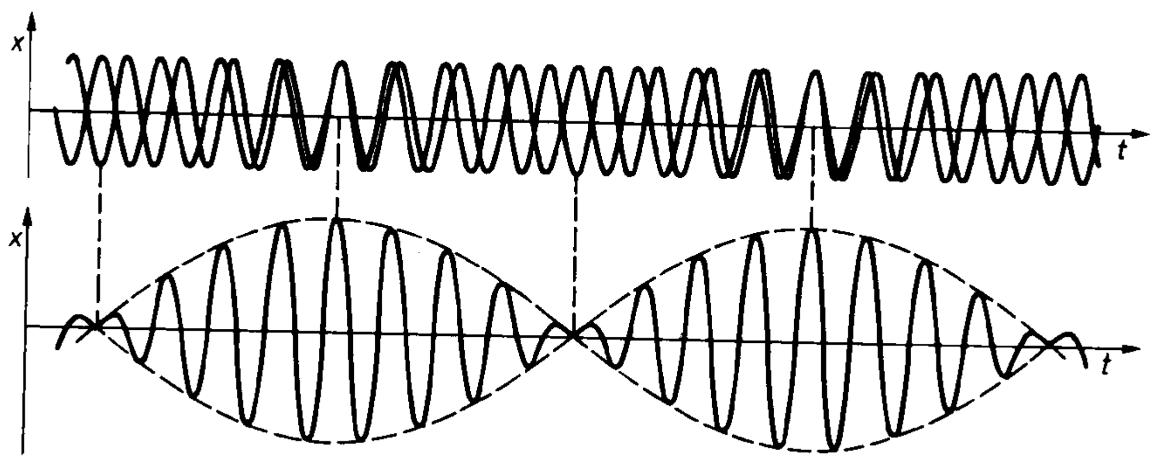
$$\mathbf{x = 2A\cos\Delta\omega t \cdot \cos\omega t}$$

Drganie wypadkowe ma pulsację ω.

Amplituda dudnień zmienia się periodycznie w czasie

Przykłady dudnień:

- **Instrumenty muzyczne nastrojone na niewiele różniące się tony.**
- **Dwie stacje radiowe pracujące na bliskich częstotliwościach.**



Nałożenie się drgań harmonicznych o zbliżonych pulsacjach (wykres górny) daje w wyniku dudnienie (wykres dolny)

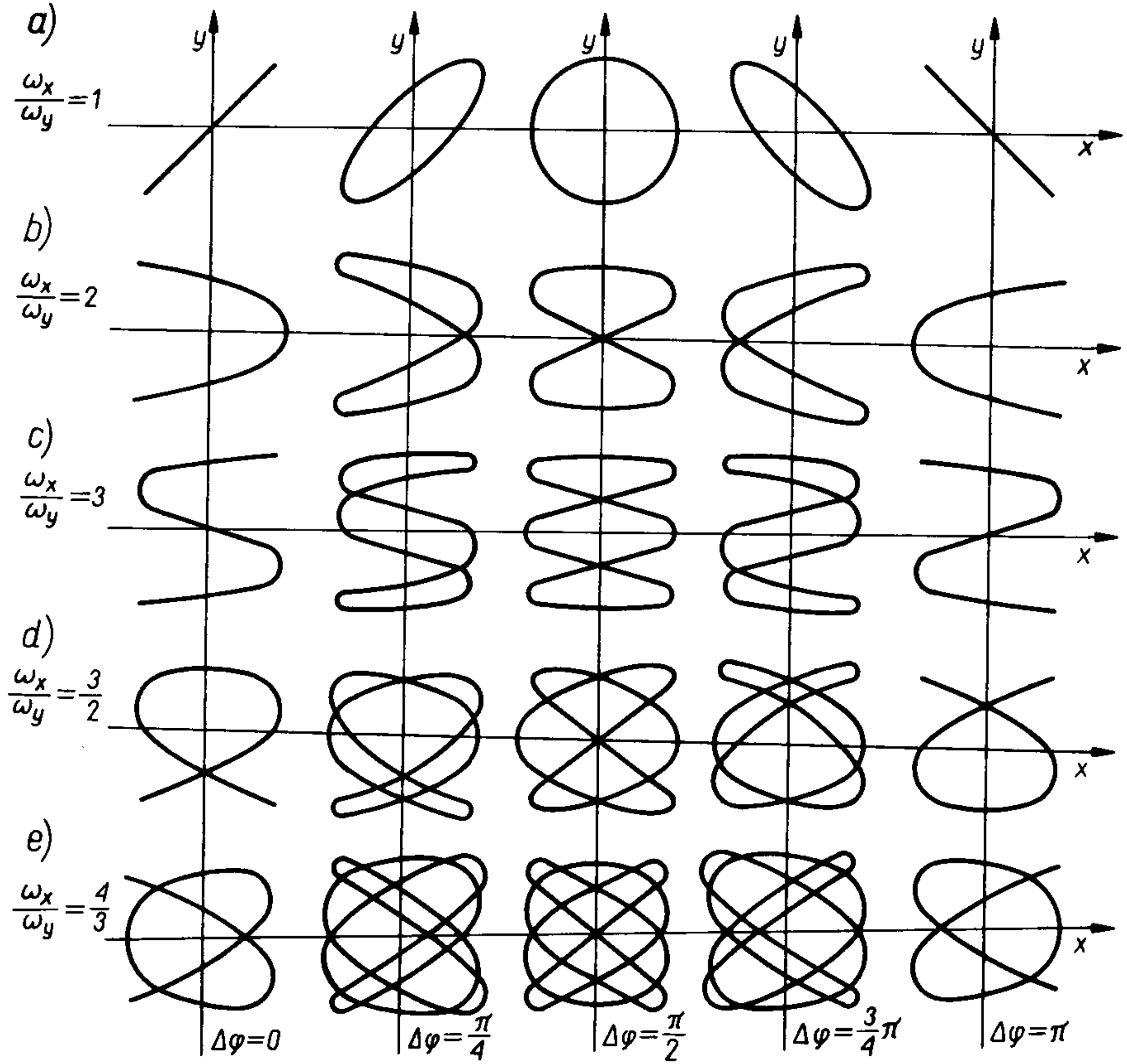
Składanie drgań prostopadłych

- *Pulsacje takie same.*
- drgania zachodzą wzdłuż osi x i y.

$$\mathbf{x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)}$$

$$\mathbf{y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)}$$

$$\mathbf{\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)}$$


a)
$\frac{\omega_x}{\omega_y}=1$
b)
$\frac{\omega_x}{\omega_y}=2$
c)
$\frac{\omega_x}{\omega_y}=3$
d)
$\frac{\omega_x}{\omega_y}=\frac{3}{2}$
e)
$\frac{\omega_x}{\omega_y}=\frac{4}{3}$
y
x
$\Delta\varphi=0$
$\Delta\varphi=\frac{\pi}{4}$
$\Delta\varphi=\frac{\pi}{2}$
$\Delta\varphi=\frac{3}{4}\pi$
$\Delta\varphi=\pi$