Elementy szczególnej teorii względności

Podstawowe założenia szczególnej teorii względności:

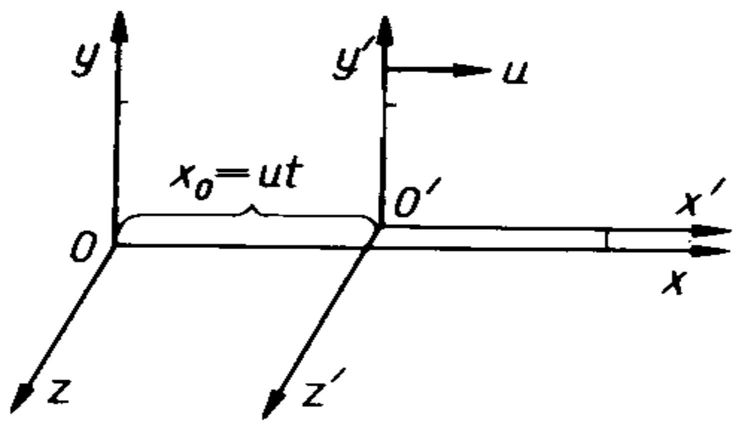
Albert Einstein 1905

- **Prawa fizyczne są takie same dla wszystkich obserwatorów, których układy odniesienia poruszają się względem siebie ze stałą prędkością (zasada względności);**
- **Prędkość światła (w próżni $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s) nie zależy od układu odniesienia.**

- Teoria względności nie jest sprzeczna z mechaniką Newtona (różnica jest znacząca tylko dla obiektów poruszających się z prędkością bliską prędkości światła);
- Pewne wnioski teorii względności nie zgadzają się z naszym doświadczeniem („zdrowym rozsądkiem”), np. zegary poruszające się chodzą wolniej.

Układy inercjalne

- Układ odniesienia, w którym ciało nie poddane działaniu sił pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym po linii prostej nazywamy układem inercjalnym.
- W układach inercjalnych prawa fizyki są jednakowe.



Współrzędne czasowo - przestrzenne zjawiska zachodzącego w punkcie P. są równe: **O $\rightarrow$ (x, y, z, t), O' $\rightarrow$ (x', y', z', t',).**

Transformacja Galileusza

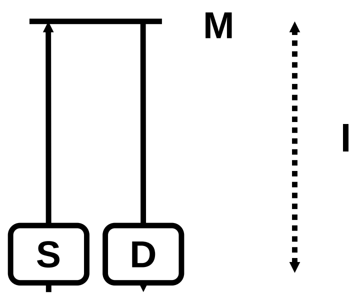
- Rozważmy dwa układy inercjalne O i O’ poruszające się względem siebie wzdłuż osi x z prędkością u
- W chwili t = 0 układy pokrywają się ze sobą (O = O’);
- Czas płynie jednakowo w obydwu układach.

Z transformacji Galileusza korzystamy przy opisie mechaniki klasycznej.

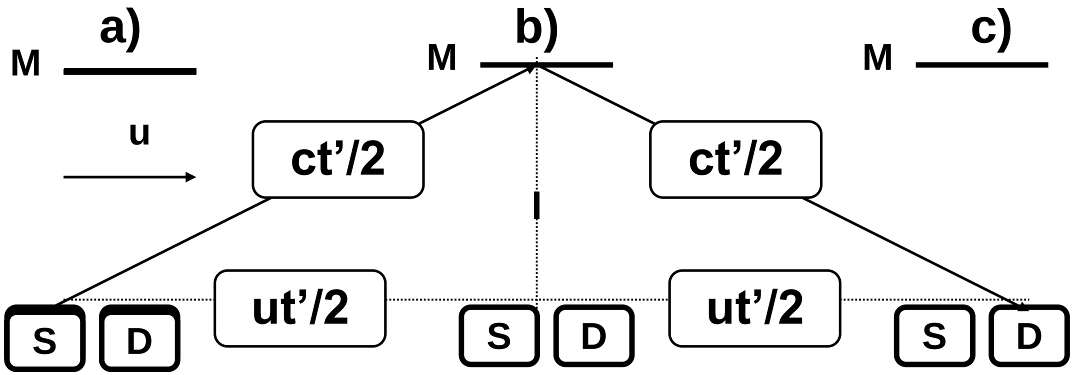
Związki umożliwiające przejście z jednego układu odniesienia do drugiego

$O \rightarrow O'$	$O' \rightarrow O\ (u \rightarrow -u)$	
$x = x' + ut$	$x' = x - ut$	
$y = y'$	$y' = y$	**(TG)**
$z = z'$	$z' = z$	
$t = t'$	$t' = t$	

M - zwierciadło
S - źródło światła
D - detektor



‘Tyknięcie’ zegara będzie czasem potrzebnym aby impuls światła ze źródła S przebył drogę l, odbił się od M i dotarł do detektora D.



„zegar świetlny" zaczął się poruszać.

Obserwator nieruchomy (układ O)

$$t = \frac{2l}{c}$$

$$\left(c\frac{t'}{2}\right)^2 = l^2 + \left(u\frac{t'}{2}\right)^2$$

- ponieważ u < c, to t' > t
- $$\mathbf{t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}}$$

- **Teoria względności głosi, że poruszające się zegary chodzą wolniej**
- **Dylatacja czasu wynika z samoistnej struktury czasu**

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$t' = \gamma t$$

Paradoks bliźniąt

- B podróżuje statkiem kosmicznym z prędkością, np. u=0.99c, podczas gdy A pozostaje na Ziemi
- u = 0.99c
- W chwili startu obaj mają po 20 lat;
- B wraca na Ziemię po 35 latach;

t'(lat) = $\sqrt{1-0.99^2}\,35 \quad (\text{lat}) \approx 5(\text{lat})$

odstęp czasu w rakiecie = $\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$ odstęp czasu na Ziemi

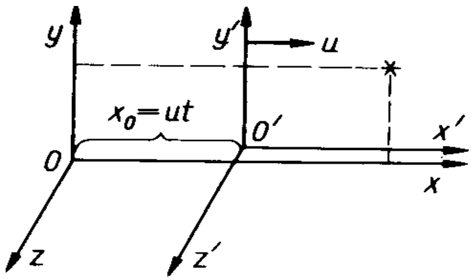
- **A = 55 (lat), B = 25 (lat)**

Transformacja Lorentza

- Prędkość światła c jest taka sama w układzie spoczywającym jak i w układzie poruszającym się.
- Czas nie jest pojęciem absolutnym ($t' \neq t$).

$$
\begin{array}{ll}
\mathbf{O \rightarrow O'} & \mathbf{O' \rightarrow O(u \rightarrow -u)} \\
\mathbf{x = \gamma(x' + ut')} & \mathbf{x' = \gamma(x - ut)} \\
\mathbf{y = y'} & \mathbf{y' = y} \qquad \mathbf{(TL)} \\
\mathbf{z = z'} & \mathbf{z' = z} \\
\mathbf{t = \gamma\left(t' + \frac{u}{c^2}x'\right)} & \mathbf{t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right)}
\end{array}
$$

Klasyczne dodawanie prędkości:



- Ciało w ruchomym układzie porusza się równolegle do osi x' z prędkością v'

$$\mathbf{v = \frac{dx}{dt}}$$

- W układzie spoczywającym prędkość ciała w kierunku osi x

$$\mathbf{v = \frac{dx}{dt} = \frac{d(x' + ut)}{dt} = \frac{dx'}{dt} + u\frac{dt}{dt} = v' + u}$$

v' = c, to v = c+u > c

Relatywistyczne dodawanie prędkości

v’ = dx’/dt’ ,

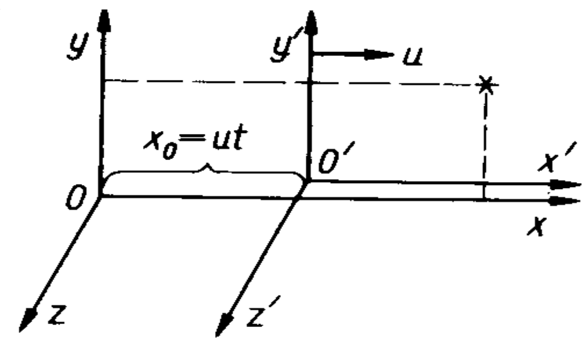
$$v' = \frac{dx'}{dt}\frac{dt}{dt'}$$

$$\frac{dx'}{dt} = \gamma\left(\frac{dx}{dt} - u\right) = \gamma(v - u)$$

$$\frac{dt'}{dt} = \gamma\left(1 - \frac{u}{c^2}\frac{dx}{dt}\right) = \gamma\left(1 - \frac{uv}{c^2}\right)$$

$$v = \frac{v' + u}{1 + \frac{uv'}{c^2}}$$

- Niech ciało porusza się w układzie O’ z prędkością v’ równoległą do osi x’



- Jeżeli $c \to \infty$, to v = v’+u i uzyskujemy klasyczne dodawanie prędkości.
- Jeśli v’ = c,

$$v = \frac{c + u}{1 + \frac{cu}{c^2}} = \frac{c + u}{1 + \frac{u}{c}} = c$$

Skrócenie Lorentza

- **Długość obiektów poruszających się będzie mniejsza w kierunku ruchu**

$$\mathbf{l_{ruchu} = l_{spoczynku}\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

- Pręt metrowy mija cię z prędkością równą 60 % prędkości światła. Jak długi ci się wyda?

$$\mathbf{l_r = \sqrt{1-0.6^2}\left(100cm\right) = 80cm}$$

Zjawisko Dopplera dla światła

- Gdy źródło zbliża się do obserwatora (lub równoważnie, obserwator porusza się ku źródłu) rejestrowana częstość światła rośnie (światło jest „przesunięte ku fioletowi”).
- Gdy źródło i obserwator oddalają się od siebie częstość światła maleje (jest to „przesunięcie ku czerwieni”).

Podstawowa różnica:

- Wielkość efektu dla dźwięku liczymy stosując mechanikę klasyczną, aby obliczyć przesunięcie dla światła musimy stosować szczególną teorię względności.

zależności pomiędzy częstotliwością światła f_B emitowaną przez źródło, a częstotliwością f_A odbieraną przez detektor (przesunięcie Dopplera):

- źródło oddalające się

$$\mathbf{f_A = f_B \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}}$$

$$\boldsymbol{\beta = \frac{u}{c}}$$

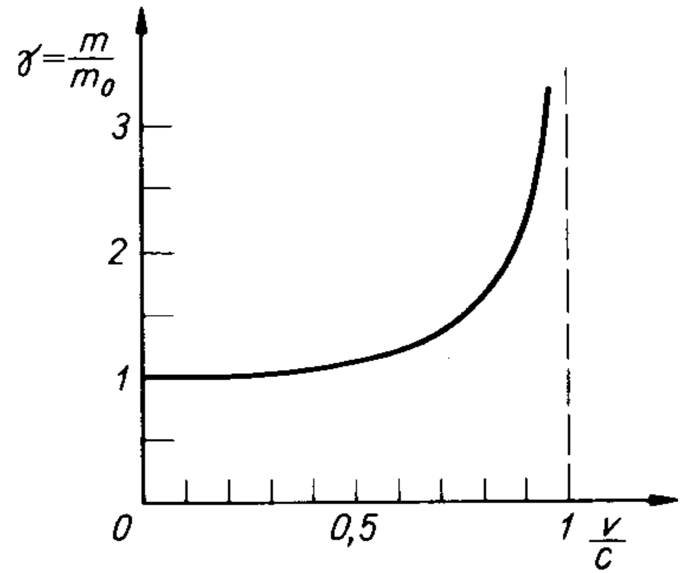
- źródło zbliżające się

$$\mathbf{f_A = f_B \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta}}$$

Zależność masy od prędkości

- Zasady zachowania pędu, momentu pędu i energii pozostają ważne w mechanice relatywistycznej.
- Aby zachować ich ważność, postać pewnych wielkości musi się zmienić.

$$\mathbf{m} = \mathbf{m_0}\gamma = \frac{\mathbf{m_0}}{\sqrt{1-\frac{\mathbf{v}^2}{\mathbf{c}^2}}} = \frac{\mathbf{m_0}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$



$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\mathbf{u}^2}{\mathbf{c}^2}}}$$

$$\beta = \frac{\mathbf{u}}{\mathbf{c}}$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{m}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{m_0}}{\sqrt{1-\beta^2}}\mathbf{v} = \mathbf{m_0}\gamma\mathbf{v}$$

Masa i energia

$$\mathbf{E = mc^2}$$

$$m = m_0\gamma = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$E = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}c^2$$

Jeżeli v = 0 (β = 0), to $E_0 = m_0c^2$.

$E_0 \rightarrow$ *energia spoczynkowa* ciała.

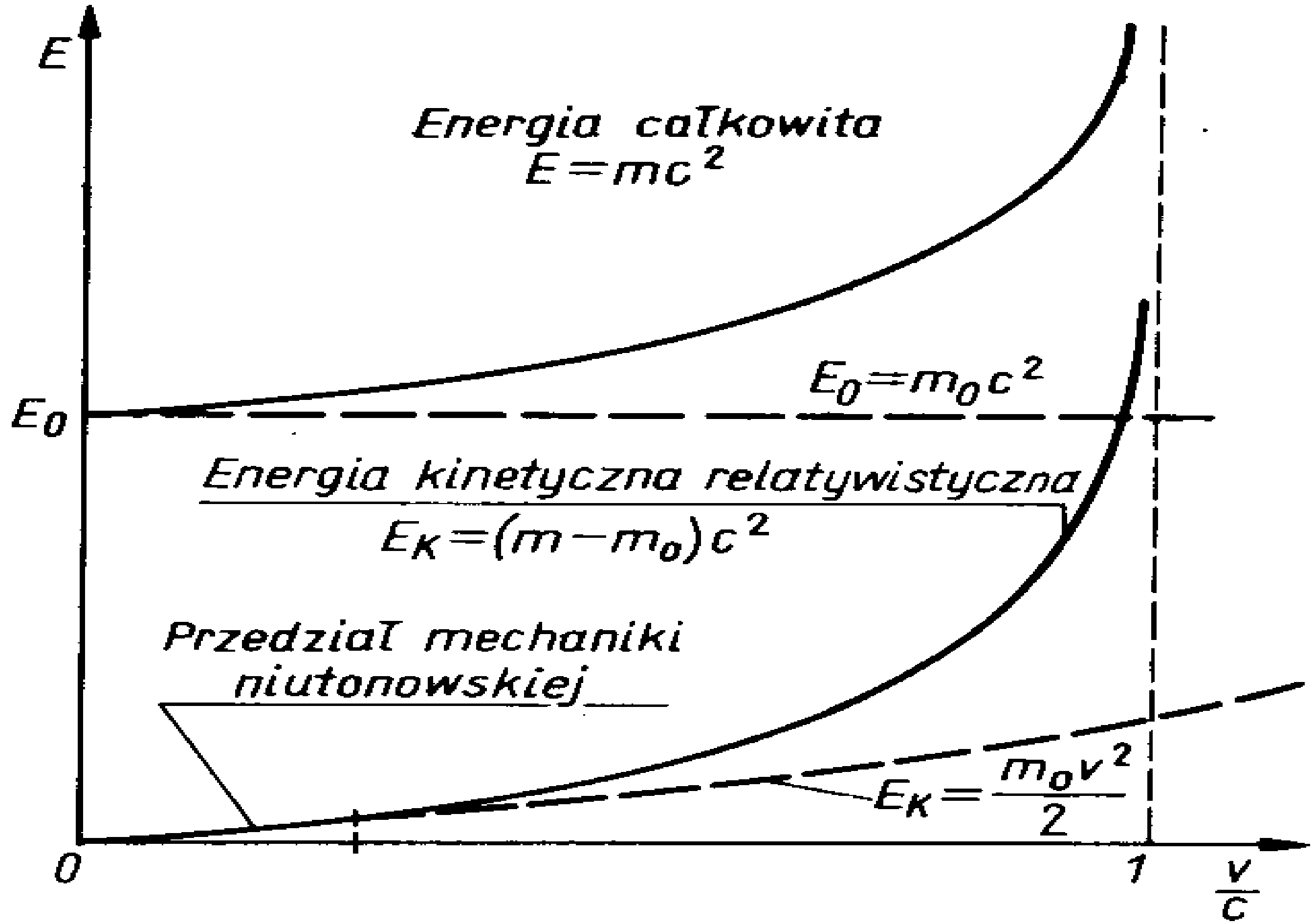
Energia kinetyczna ciała E_k

$$\mathbf{E_k = E - E_0 = (m - m_0)c^2}$$

$$\mathbf{E_k = m_0 c^2 (\gamma - 1) = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right)}$$

- Gdy $v \to c$, to $E_k \to \infty$. (rozpędzenie ciała do prędkości światła wymaga nieskończenie wielkiej pracy).
- Z prędkością światła mogą się poruszać jedynie obiekty o masie m = 0.

Zależność energii od prędkości



Relatywistyczna postać drugiej zasady dynamiki Newtona

$$\mathbf{Fdt = dp}$$

$$\mathbf{p = mv = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} v = m_0 \gamma v}$$

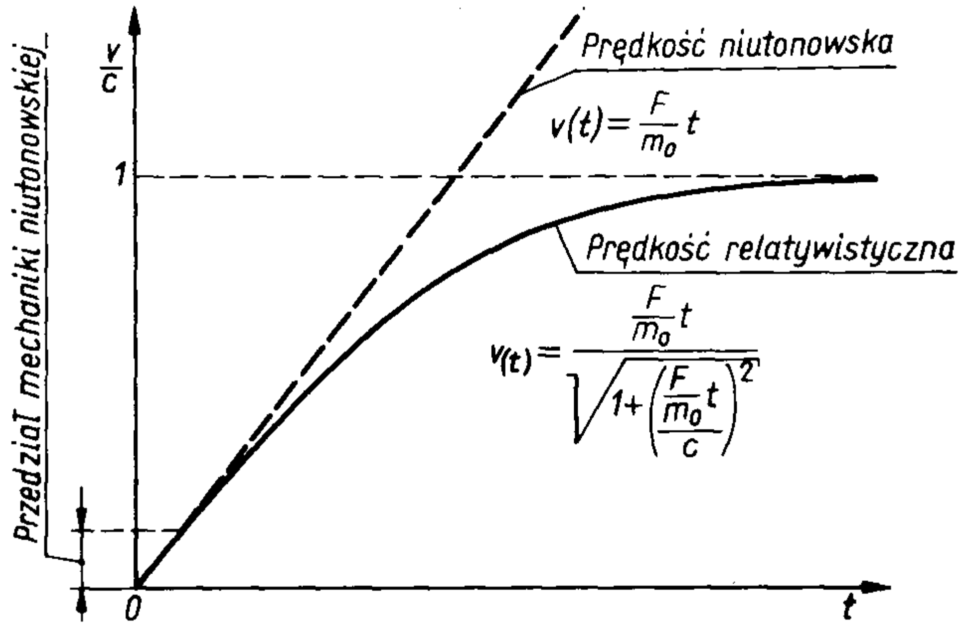
$$\mathbf{Fdt = d\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}}\right)}$$

$$\mathbf{Ft + C = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-(v/c)^2}}}$$

t=0 v=0, otrzymamy C=0

$$\mathbf{v(t) = \frac{at}{\sqrt{1+\left(\frac{at}{c}\right)^2}}}$$

$$\mathbf{a = F/m_0}$$



v/c
1
0
t
Prędkość niutonowska
v(t) = F/m0 t
Prędkość relatywistyczna
v(t) = (F/m0 t) / √(1 + ((F/m0 t)/c)²)
Przedział mechaniki niutonowskiej

Związek energii z pędem.

$E = mc^2$, $p = mv$.

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4(1 - \frac{v^2}{c^2})$$

$$E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4$$

$$E = \sqrt{m_0^2c^4 + p^2c^2}$$

- Dla cząstek, których masy spoczynkowe $m_0 = 0$ ich energia relatywistyczna wyrazi się wzorem

$$E = p \cdot c$$